Protokół teleportacji kwantowej

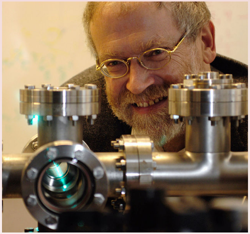
Robert Nowotniak

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej
Politechnika Łódzka

Sekcja Informatyki Kwantowej, 9 stycznia 2008

Teleportacja kwantowa

- **1993** – Propozycja teoretyczna protokołu teleportacji kwantowej
- **1997** – Pomyślny eksperyment praktyczny – fotony, A. Zeilinger
- **2004** – Pierwszy eksperyment z atomami, Riebe, Häffner, Roos
- ...



Literatura

Charles H. Bennet, Gilles Brassard et al.
Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. **1993**

Gilles Brassard.
Teleportation as a quantum computation. 1996

Mika Hirvensalo.
Algorytmy Kwantowe. WSiP, Warszawa, 2004

Roger Penrose.
Nowy umysł cesarza. Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa, 1995, str. 40-44

Roger Penrose.
Droga do rzeczywistości. Warszawa, 2004, str. 552-580

Plan referatu

1. Stany splątane
2. Opis protokołu teleportacji
3. Układ bramek kwantowych
4. Symulacja układu

Stany splątane

Stan $|\phi\rangle$ dwóch kubitów jest *splątany*, jeśli nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego pojedynczych kubitów, tzn:

$$|\phi\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

gdzie

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1$$

Stany splątane

Stan $|\phi\rangle$ dwóch kubitów jest *splątany*, jeśli nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego pojedynczych kubitów, tzn:

$$|\phi\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

gdzie

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad |c|^2 + |d|^2 = 1$$

W teleportacji będzie wykorzystany stan splątany:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Stany splątane

Stan $|\Phi^+\rangle$ jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

Stany splątane

Stan $|\Phi^+\rangle$ jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

Stany splątane

Stan $|\Phi^+\rangle$ jest stanem splątanym, ponieważ nie można go przedstawić w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\Phi^+\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \neq ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Z tego wynikałby układ równań

$$\begin{cases} ac = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ad = 0 \\ bc = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(1) jest układem sprzecznym, więc $|\Phi^+\rangle$ jest stanem splątanym.

Plan referatu

1. Stany splątane
2. Opis protokołu teleportacji
3. Układ bramek kwantowych
4. Symulacja

Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

Wymagania

1. Klasyczny kanał komunikacji (przysłanie bitów)
2. Kwantowy kanał komunikacji (współdzielona splątana para EPR)

Teleportacja kwantowa – opis

- Celem teleportacji kwantowej jest przesłanie stanu kubitu pomiędzy różnymi lokalizacjami

Wymagania

1. Klasyczny kanał komunikacji (przysłanie bitów)
2. Kwantowy kanał komunikacji (współdzielona splątana para EPR)

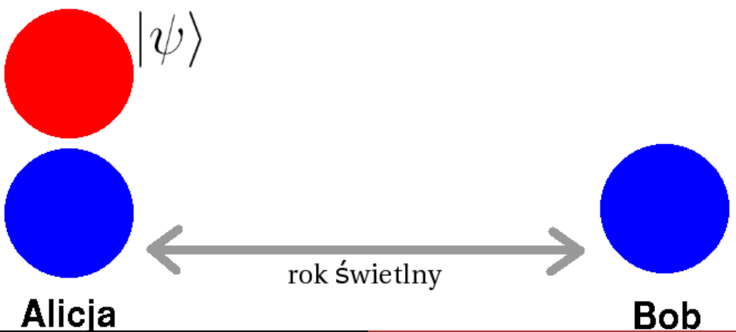
Teleportacja kwantowa nie oznacza *natychmiastowego* przesyłania informacji – z szybkością większą od prędkości światła.

(to byłoby sprzeczne ze szczególną teorią względności)

Opis protokołu

- Alicja posiada kubit w pewnym stanie $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ (którego wartości może nie znać)
- Alicja i Bob, znajdując się w różnych lokalizacjach, posiadają po jednym kubicie należącym do splątanej pary:

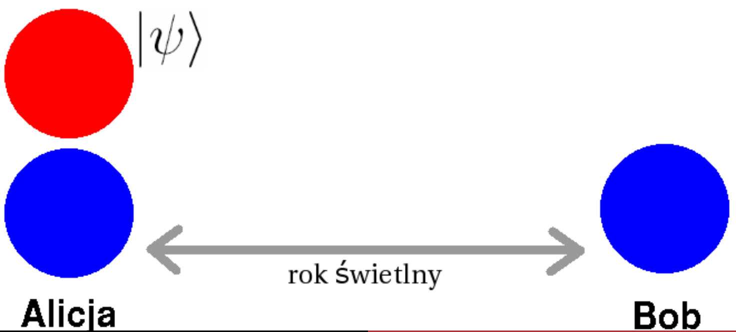
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$



Opis protokołu

- Alicja posiada kubit w pewnym stanie $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ (którego wartości może nie znać)
- Alicja i Bob, znajdując się w różnych lokalizacjach, posiadają po jednym kubicie należącym do splątanej pary:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$



Opis protokołu

Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitu $|\psi\rangle$ oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie[1]:

$$(a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) =$$

[1]W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowadniana wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego: $|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle$ itd.

Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitu $|\psi\rangle$ oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie[1]:

$$(a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|11\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|00\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|11\rangle$$

[1] W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowadniana wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego: $|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle$ itd.

Opis protokołu

Wobec tego stan całego układu – nieznanego kubitu $|\psi\rangle$ oraz splątanej pary EPR – przedstawia wyrażenie[1]:

$$
\begin{aligned}
(a|0\rangle + b|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \\
= \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|0\rangle|11\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|00\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1\rangle|11\rangle \\
= \frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle \qquad (2)
\end{aligned}
$$

[1] W przekształceniu (2) wykorzystywana jest nieudowadniana wcześniej, lecz prosta do wykazania własność iloczynu tensorowego: $|1\rangle \otimes |101\rangle = |1\rangle|101\rangle = |1101\rangle$ itd.

- Alicja wykonuje na swoim kubicie, ze splątanej pary, operację **sterowanej negacji**, wykorzystując nieznany kubit $|\psi\rangle$ jako kubit sterujący. Stan:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|111\rangle$$

przekształca się w stan:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|101\rangle$$

Opis protokołu III

Alicja wykorzystuje operator Hadamarda na posiadanym przez nią nieznanym kubicie, otrzymując:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle \\ + &\frac{b}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|10\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|01\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

Opis protokołu IV

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} &\tfrac{a}{2}|000\rangle + \tfrac{a}{2}|100\rangle + \tfrac{a}{2}|011\rangle + \tfrac{a}{2}|111\rangle \\ &+\tfrac{b}{2}|010\rangle + \tfrac{b}{2}|110\rangle + \tfrac{b}{2}|001\rangle + \tfrac{b}{2}|101\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Opis protokołu IV

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} &\tfrac{a}{2}|000\rangle + \tfrac{a}{2}|100\rangle + \tfrac{a}{2}|011\rangle + \tfrac{a}{2}|111\rangle \\ &+\tfrac{b}{2}|010\rangle + \tfrac{b}{2}|110\rangle + \tfrac{b}{2}|001\rangle + \tfrac{b}{2}|101\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Oddzielenie kubitu posiadanego przez Boba:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}|00\rangle a|0\rangle + \tfrac{1}{2}|10\rangle a|0\rangle + \tfrac{1}{2}|01\rangle a|1\rangle + \tfrac{1}{2}|11\rangle a|1\rangle \\ &+\tfrac{1}{2}|01\rangle b|0\rangle - \tfrac{1}{2}|11\rangle b|0\rangle + \tfrac{1}{2}|00\rangle b|1\rangle - \tfrac{1}{2}|10\rangle b|1\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Opis protokołu IV

Wykorzystując własności iloczynu tensorowego i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}&\tfrac{a}{2}|000\rangle + \tfrac{a}{2}|100\rangle + \tfrac{a}{2}|011\rangle + \tfrac{a}{2}|111\rangle\\ &+\tfrac{b}{2}|010\rangle + \tfrac{b}{2}|110\rangle + \tfrac{b}{2}|001\rangle + \tfrac{b}{2}|101\rangle\end{aligned} \tag{4}$$

Oddzielenie kubitu posiadanego przez Boba:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}|00\rangle a|0\rangle + \tfrac{1}{2}|10\rangle a|0\rangle + \tfrac{1}{2}|01\rangle a|1\rangle + \tfrac{1}{2}|11\rangle a|1\rangle\\ &+\tfrac{1}{2}|01\rangle b|0\rangle - \tfrac{1}{2}|11\rangle b|0\rangle + \tfrac{1}{2}|00\rangle b|1\rangle - \tfrac{1}{2}|10\rangle b|1\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

Pogrupowanie składników:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + \tfrac{1}{2}|01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle)\\ &+\tfrac{1}{2}|10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + \tfrac{1}{2}|11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)\end{aligned} \tag{6}$$

Opis protokołu V

Ostatecznie Alicja dokonuje **pomiar** posiadanych przez nią dwóch kubitów. Na mocy powyższych przekształceń, stan całego układu (wraz z kubitem Boba) ma jedną z następujących wartości:

Wynik pomiaru Alicji	Stan po obserwacji
00	$\|00\rangle(a\|0\rangle + b\|1\rangle)$
01	$\|01\rangle(a\|1\rangle + b\|0\rangle)$
10	$\|10\rangle(a\|0\rangle - b\|1\rangle)$
11	$\|11\rangle(a\|1\rangle - b\|0\rangle)$

Opis protokołu V

Ostatecznie Alicja dokonuje **pomiar** posiadanych przez nią dwóch kubitów. Na mocy powyższych przekształceń, stan całego układu (wraz z kubitem Boba) ma jedną z następujących wartości:

Wynik pomiaru Alicji	Stan po obserwacji
00	$\|00\rangle(a\|0\rangle + b\|1\rangle)$
01	$\|01\rangle(a\|1\rangle + b\|0\rangle)$
10	$\|10\rangle(a\|0\rangle - b\|1\rangle)$
11	$\|11\rangle(a\|1\rangle - b\|0\rangle)$

Na podstawie dwóch bitów otrzymanych od Alicji, Bob – wykorzystując odpowiedni operator kwantowy – doprowadza stan posiadanego przez siebie kubitu do pożądanego stanu $|\psi\rangle$.

Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...

Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.

Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.
- Teleportacja kwantowa pozwala na przesyłanie stanów układów kwantowych, bez ich rejestrowania

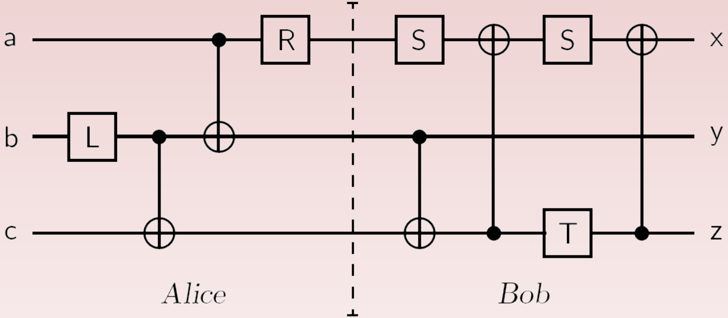
Znaczenie teleportacji...

- Możliwość potencjalnej teleportacji układów większych niż pojedyncze cząstki prowadzi do bardzo interesujących wniosków...
- Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności** możemy tylko w ograniczonym stopniu rejestrować rzeczywistość — nigdy nie będziemy w stanie zapisać dokładnie całego stanu materii np. w ludzkim mózgu w danej chwili.
- Teleportacja kwantowa pozwala na przesyłanie stanów układów kwantowych, bez ich rejestrowania
- Liczba zmiennych, które opisują stany kwantowe wszystkich cząstek w ciele człowieka, jest liczbą porównywalną z liczbą atomów we wszechświecie.

Plan referatu

1. Stany splątane
2. Opis protokołu teleportacji
3. Układ bramek kwantowych
4. Symulacja

Układ bramek realizujący teleportację



$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Plan referatu

1. Stany splątane
2. Opis protokołu teleportacji
3. Układ bramek kwantowych
4. Symulacja układu

(kod w Numerical Python)

Koniec

Dziękuję.
Pytania lub wątpliwości?